211 група «Диференціальні рівняння»

(доцент Бистрянцева А.М.)

Тема. Лінійні диференціальні рівняння I порядку

План

1. Поняття лінійного диференціального рівняння першого порядку.

2. Метод Бернуллі розв'язування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку.

3. Метод варіації довільної сталої.

1. Поняття лінійного диференціального рівняння першого порядку

Означення 1 Рівняння вигляду $y' + P(x)y = Q(x)$ називають лінійних диференціальним рівнянням першого порядку.

Означення 2 Якщо $Q(x) \neq 0$, то рівняння називають лінійним неоднорідним; якщо $Q(x) = 0$, то рівняння набуває вигляду $y' + P(x)y = 0$ і називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням першого порядку.

Термін «лінійне рівняння» пояснюється тим, що невідома функція $y(x)$ і її похідна y' входять до рівняння у першому степені, тобто лінійно.

Рівняння $y' + P(x)y = 0$ одночасно є рівнянням з відокремлюваними змінними. Його розв'язок має вигляд:

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y\,;\ \frac{dy}{y} = -P(x)dx\,;\ \int\frac{dy}{y} = -\int P(x)dx\,;$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln C\,,$$

звідси

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

2. Метод Бернуллі розв'язування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку

> Для розв'язування неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь застосовують *метод Бернуллі* або *метод варіації довільної сталої*.

Метод Бернуллі. Розв'язок нелінійного рівняння (3.5) шукають у вигляді добутку двох невідомих функцій $u(x)$ і $v(x)$, тобто

$$\boxed{y(x) = u(x)v(x).}$$

Після цього рівняння (3.5) набуває вигляду

$$\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} + P(x)uv = Q(x),$$

або

$$\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right)v + u\frac{dv}{dx} = Q(x).$$

Підберемо функцію $u(x)$ так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю. Тоді рівняння (3.5) буде рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} + P(x)u = 0, \\ u\dfrac{dv}{dx} = Q(x). \end{cases} \tag{3.7}$$

Перше рівняння цієї системи — лінійне однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Його частинний розв'язок такий:

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx}.$$

Після цього друге рівняння системи (3.7) набуває вигляду:

$$\frac{dv}{dx}e^{-\int P(x)dx} = Q(x), \quad \frac{dv}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}, \quad v = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (3.5) має вигляд:

$$\boxed{y = uv = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.} \tag{3.8}$$

Перший доданок у правій частині формули (3.8) є загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння (3.6), а другий доданок — частинним розв'язком неоднорідного рівняння (3.5).

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа). Розв'язок рівняння (3.5) шукають у вигляді

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}. \tag{3.9}$$

При фіксованому значенні C цією формулою задається розв'язок лінійного однорідного рівняння (3.6). Підставивши (3.9) у (3.5), дістанемо рівняння $C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$. Звідси

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1 ,$$

де C_1 — довільна стала. Тоді загальний розв'язок рівняння (3.5) задається формулою

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[C_1 + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right],$$

яка збігається із формулою (3.8).

Зауваження. Деякі рівняння будуть лінійними, якщо за невідому функцію розглянути змінну x, а за незалежну — змінну y, тобто рівняння вигляду $x' + P(y)x = Q(y)$.

2. Розв'язування однорідних диференціальних рівнянь

Приклади. **1.** Розв'язати рівняння $xy' - 2y = 2x^4$.

Розв'язання. Розв'яжемо відповідне лінійне однорідне рівняння $xz' - 2z = 0$.

Поділивши змінні, дістанемо

$$\frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x}, \; x, \; z \neq 0 .$$

Зінтегруємо обидві частини рівняння: $\ln|z| = 2\ln|x| + \ln|C|$. Дістанемо загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння $z = Cx^2$. Далі знайдемо розв'язок вихідного неоднорідного рівняння, розв'язавши однорідне рівняння з довільною сталою, яка є функцією від x (метод варіації довільної сталої [ч. 2. с. 28]):

$$y = C(x)x^2 ,$$

де $C(x)$ – невідома функція. Підставивши у вихідне рівняння $y = C(x)x^2$ і $y' = C'(x)x^2 + 2xC(x)$, матимемо

$$C'(x)x^3 = 2x^4,\ C'(x) = 2x.$$

Звідси

$$C(x) = x^2 + C.$$

Загальним розв'язком лінійного неоднорідного рівняння є

$$y = \left(x^2 + C\right)x^2 = x^4 + Cx^2.$$

Відповідь: $y = \left(x^2 + C\right)x^2$.

2. Розв`язати рівняння $xy' + (x+1)y = 3x^2 \mathrm{e}^{-x}$.

Розв`язання. Шукаємо розв'язок даного рівняння у вигляді добутку двох функцій (метод Бернуллі – Фур'є) [ч. 2, с. 31]:

$$y = u(x)v(x).$$

Маємо

$$x\left[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right] + (x+1)u(x)v(x) = 3x^2 \mathrm{e}^{-x},$$

або

$$\left[xu'(x) + (x+1)u(x)\right]v(x) + xu(x)v'(x) = 3x^2 \mathrm{e}^{-x}.$$

Виберемо функцію $u(x)$ так, щоб $xu'(x) + (x+1)u(x) = 0$, тоді

$$xu(x)v'(x) = 3x^2 \mathrm{e}^{-x},$$

або

$$u(x)v'(x) = 3x\mathrm{e}^{-x}.$$

Розв'язавши здобуте рівняння, знайдемо $u(x)$:

$$xu'(x) = -(x+1)u(x).$$

Поділимо змінні

$$\frac{du}{u} = -\frac{x+1}{x}dx.$$

Почленно зінтегруємо

$$\ln|u| = -x - \ln|x|.$$

Звідси

$$u = \mathrm{e}^{-x}\frac{1}{x}$$

(тут при інтегруванні прийняли $C = 0$, оскільки $u(x)$ – довільна).

Тепер знайдемо $v(x)$:

$$v'(x)\mathrm{e}^{-x}\frac{1}{x} = 3x\mathrm{e}^{-x},$$

або $$v'(x) = 3x^2,$$

звідси $$v = x^3 + C.$$

Нарешті маємо

$$y = u(x)v(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x} + \frac{C}{x}\mathrm{e}^{-x}.$$

Відповідь: $y = x^2 \mathrm{e}^{-x} + \dfrac{C}{x}\mathrm{e}^{-x}$.

7. Знайдіть загальний розв'язок рівняння

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}.$$

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням першого порядку (див. формулу (3.5)). Для його розв'язання застосуємо метод Бернуллі:

$$y = u(x)v(x), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx},$$

$$\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} + \frac{uv}{x} = \frac{\sin x}{x}, \quad \left(\frac{du}{dx} + \frac{u}{x}\right)v + u\frac{dv}{dx} = \frac{\sin x}{x},$$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = -\dfrac{u}{x}, \\ u\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{\sin x}{x}; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{du}{u} = -\dfrac{dx}{x}, \\ u\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{\sin x}{x}; \end{cases} \quad \begin{cases} u = \dfrac{1}{x}, \\ \dfrac{dv}{dx} = \sin x; \end{cases} \quad \begin{cases} u = \dfrac{1}{x}, \\ v = -\cos x + C. \end{cases}$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння такий:

$$y = \frac{1}{x}(C - \cos x).$$

Завдання для самоконтролю

1. Розв'язати диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними:

1.1.1. $3(x^2y^2 + x^2)dx + (2y - x^3y)dy = 0$. **1.1.2.** $xe^y y' = e^{2y} + 1$.

1.1.3. $y(4 + x^2)dy + \sqrt{1 - y^2}\,dx = 0$. **1.1.4.** $y' = x4^{x+y}$.

1.1.5. $(x^2 - y^2x^2)dx + (y^2 - x^2y^2)dy = 0$. **1.1.6.** $\sqrt{1 - x^2}\,dy - ydx = 0$.

1.1.7. $x(1 - y^2)dx - \sqrt{1 - x^2}\,dy = 0$. **1.1.8.** $yy' + \sqrt{\dfrac{4 + y^2}{4 - x^2}} = 0$.

1.1.9. $\cos ye^x dx + (1 + e^{2x})\sin ydy = 0$. **1.1.10.** $xy' - 4 = y^2$.

1.1.11. $y' - x\cos^2 y\sin^2 x = 0$. **1.1.12.** $yy'(1 + x^2) = 1 + y^2$.

1.1.13. $(1 + y^4)dx - \sqrt{x}\,ydy = 0$. **1.1.14.** $(x - 1)yy' = 1 + y^2$.

1.1.15. $y(1 + 2x)y' = (1 - 2x)$. **1.1.16.** $x^2yy' + 3 = y^2$.

2. Розв’язати однорідні диференціальні рівняння:

1.2.1. $2y' = e^{y/x} + 2y/x$.

1.2.2. $y' = \dfrac{x^2}{y^2} + 2\dfrac{y}{x}$.

1.2.3. $y' = \dfrac{x+2y}{x-y} - 1$.

1.2.4. $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 2\dfrac{y}{x} - 4$.

1.2.5. $(x+y)dx + (y-2x)dy = 0$.

1.2.6. $(x^2 + y^2)dx + x^2 dy = 0$

1.2.7. $(y-2x)dx + (y+2x)dy = 0$.

1.2.8. $2xydy = (x^2 - y^2)dx$.

1.2.9. $(3y^2 + 2x^2)dx = (y^2 - x^2)dy$.

1.2.10. $(2y - x)dx = (3x + y)dy$.

1.2.11. $y' = \dfrac{x+2y}{x-4y}$.

1.2.12. $xy' - y = x\,\mathrm{ctg}\dfrac{y}{x}$.

1.2.13. $(2x+3y)dx = (y+2x)dy$.

1.2.14. $2yxy' = x^2 + y^2$.

1.2.15. $xy' = x\sin\dfrac{y}{x} + y$.

1.2.16. $xy' = xe^{2y/x} + y$.

Розв’язати рівняння.

47. $y' - y\sin x = \sin x\cos x$.

48. 1) $y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4$;

2) $xy' - 2y + x^2 = 0$.

49. $y' + y\cos x = \mathrm{e}^{-\sin x}$.

50. 1) $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$;

2) $y' - 2xy = 2x\mathrm{e}^{x^2}$.

51. 1) $y' + y\,\mathrm{ctg}\,x = 2x + \dfrac{x^2\cos x}{\sin x}$;

2) $y'x\ln x - (1+\ln x)y + \sqrt{x}\left(1 + \ln\sqrt{x}\right) = 0$.

Розв’язати задачі Коші.

56. 1) $y' + \dfrac{3}{x}y = \dfrac{2}{x^3}$, $y(1) = 1$;

2) $xy' + y = \ln x + 1$, $y(1) = 3$.

57. 1) $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$;

2) $(1+x)y' + y + x^2(1+x) = 0$, $y(0) = \dfrac{1}{12}$.

Розв'яжіть лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

26. $y' + y = e^x$.

27. $y' - 2xy = 1 - 2x^2$.

28. $xy' + y = x^2 + 3x + 2$.

29. $tdx + (x - t\sin t)dt = 0$.

30. $2y\dfrac{dx}{dy} + x = 2y^3$.

31. $y' + y\cos x = \sin x \cos x$.

32. $y' - 4y = \cos x$.

33. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x$.

34. $y' - \dfrac{2}{x}y = \dfrac{e^x(x-2)}{x}$.

35. $y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = 2x - x^2\,\mathrm{ctg}\,x$.